Universität Zürich[UZH]

Philosophisches Seminar

Einführung in die formale Logik I

Frühjahrssemester 2019

Vorlesung 8

Prof. Dr. Katia Saporiti

Kalküle

- Die Begriffe der Folgerung (Ableitung aus Prämissen) und des Beweises sind vollständig ***formalisierbar***. (Formale Beweise und Ableitungen nehmen nur auf syntaktisch beschreibbare Gestalt oder Form der vorkommenden Sätze Bezug.)
- Ob es sich bei einer gegebenen Folge von Sätzen tatsächlich um eine Ableitung (bzw. einen Beweis) handelt, ist ***entscheidbar*** und kann allein anhand syntaktischer Merkmale (d.h. anhand der Gestalt oder Form) der beteiligten Sätze festgestellt werden.
- Ein Kalkül ist ein systematisches, formales Verfahren zur Erzeugung von Ableitungen und Beweisen.
- Es gibt unterschiedliche Arten von Kalkülen, z.B.:
  - *Axiomatische Kalküle* enthalten Axiome und Schlussregeln.
  - Der *Kalkül des natürlichen Schliessens* enthält nur Schlussregeln.
  - Der *Baum-Kalkül* (auch *Beth-Kalkül* oder *Methode der Tableaux* oder *Tableaux*-Kalkül) beruht auf der Methode der indirekten Beweisführung: Um einen Satz A zu beweisen, zeigt man mittels eines systematischen Verfahrens, dass seine Negation (¬A) nicht erfüllbar ist.

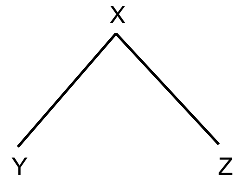
Der Beth- oder Baum-Kalkül

X sei ein aussagenlogisch komplexer Satz. Die Konstruktion eines ***Baums*** für X ist der Versuch, in systematischer Weise Situationen anzugeben, in denen X wahr ist. Das Scheitern eines solchen Versuchs belegt, dass es keine Boolesche Bewertung gibt, unter der dies der Fall ist.

X wird als ***Ursprung*** des Baumes gesetzt, der auf eine der beiden folgenden Arten ***erweitert*** wird:

nicht verzweigend

verzweigend

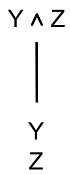


Wenn X wahr ist gdw. Y *und* Z wahr sind, dann werden Y und Z *untereinander* angehängt.

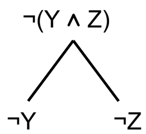
Wenn X wahr ist gdw. Y *oder* Z wahr ist, dann werden Y und Z *nebeneinander* angehängt.

Regeln für die Konstruktion von Bäumen

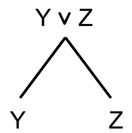
1. **Konjunktion**
   Y ∧ Z ist wahr gdw. Y *und* Z wahr sind: Y und Z werden *untereinander* angehängt.



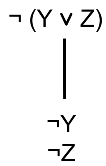
2. **Negierte Konjunktion**
   ¬(Y∧Z) ist wahr gdw. ¬Y *oder* ¬Z wahr ist (oder beides): ¬Y und ¬Z werden *nebeneinander* angehängt.



3. **Adjunktion**
   Y ∨ Z ist wahr gdw. Y *oder* Z wahr ist (oder beides): Y und Z werden *nebeneinander* angehängt.



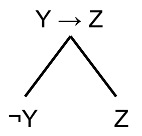
4. **Negierte Adjunktion**
   ¬(Y∨Z) ist wahr gdw. ¬Y *und* ¬Z wahr sind: ¬Y und ¬Z werden *untereinander* angehängt.



Regeln für die Konstruktion von Bäumen

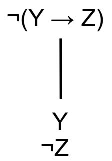
5. Konditional

Y→Z ist wahr gdw. ¬Y *oder* Z wahr ist (oder beides): ¬Y und Z werden *nebeneinander* angehängt.



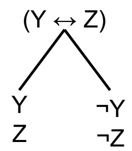
6. Negiertes Konditional

¬(Y→Z) ist wahr gdw. Y *und* ¬Z wahr sind: Y und ¬Z werden *untereinander* angehängt.



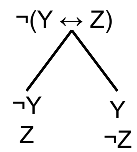
6. Bikonditional

Y ↔ Z ist wahr gdw. Y und Z *oder* ¬Y und ¬Z wahr sind: Y, Z und ¬Y, ¬Z werden *nebeneinander* angehängt.



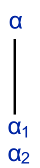
7. Negiertes Bikonditional

¬(Y ↔ Z) ist wahr gdw. ¬Y und Z *oder* Y und ¬Z wahr sind: ¬Y, Z und Y,¬Z werden *nebeneinander* angehängt.



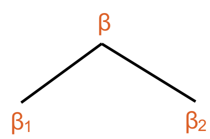
Einteilung von AL-Formeln in α- und β-Formeln (für zwei Arten von Erweiterungsregeln)

α-Formeln (nicht verzweigend)



α	α_1	α_2
Y ∧ Z	Y	Z
¬ (Y ∨ Z)	¬ Y	¬ Z
¬ (Y → Z)	Y	¬ Z
¬¬Y	Y	Y

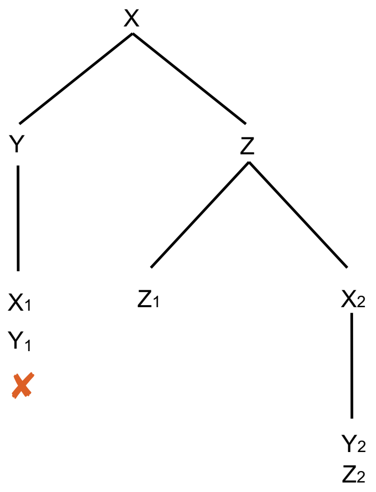
β-Formeln (verzweigend)



β	β_1	β_2
¬ (Y ∧ Z)	¬ Y	¬ Z
Y ∨ Z	Y	Z
Y → Z	¬ Y	Z
Y ↔ Z	Y Z	¬ Y ¬ Z
¬ (Y ↔ Z)	¬ Y Z	Y ¬ Z

Äste und *geschlossene Äste*

- Der nebenstehende Baum enthält drei ***Äste***:
  - {X, Y, X_1, Y_1}
  - {X, Z, Z_1}
  - {X, Z, X_2, Y_2, Z_2}
- Jeder Ast ist ein Versuch, eine Situation zu beschreiben, in der X (der Ursprung des Baums) wahr ist.
- Ein Ast eines Baums ist genau dann ***geschlossen***, wenn auf ihm eine Formel und ihre Negation vorkommen. (Geschlossene Äste werden mit einem Kreuz markiert.)
- Ein Baum ist genau dann ***geschlossen***, wenn jeder seiner Äste geschlossen ist.



Vollständige Bäume

- Ein Ast eines Baumes ist ***vollständig***, wenn zu jedem α, das auf ihm vorkommt, auch α_1 und α_2 auf ihm vorkommen und zu jedem β, das auf ihm vorkommt, wenigstens eines von beiden – β_1 oder β_2 – auf ihm vorkommt (wenn also alle Formeln „vollständig entwickelt" sind und er sich nicht mehr fortführen lässt).
- Ein Baum ist ***vollständig***, wenn jeder seiner Äste vollständig oder geschlossen ist.
- Wenn ein Baum vollständig ist (nicht mehr erweitert werden kann), gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Alle Äste sind geschlossen (auf jedem Ast findet sich eine Formel und ihre Negation, der Baum ist geschlossen).
   - Alle Versuche, eine Situation zu beschreiben, in der der Ursprung des Baumes wahr ist, sind gescheitert.
   - Es gibt keine solche Situation. Der Ursprung des Baums ist eine Kontradiktion.
2. Mindestens ein Ast ist offen (d.h. der Baum ist nicht geschlossen).
   - Offene Äste repräsentieren Situationen, in denen der Ursprung des Baumes wahr ist.
   - Der Ursprung ist erfüllbar (kann wahr sein).

Beweise und Ableitungen im Baum-Kalkül

- Eine Formel X ist eine ***Kontradiktion*** (unerfüllbar) gdw. es einen geschlossenen Baum für X gibt.
- Eine Menge M von Formeln ist ***unerfüllbar*** (inkonsistent) gdw. es einen geschlossenen Baum für die Konjunktion der Elemente von M gibt.
- Ein ***Beweis*** für eine Formel X ist ein geschlossener Baum für die Negation von X.
- Eine Formel X ist ***logisch wahr*** (eine Tautologie) gdw. es einen Beweis für X gibt.
- Eine ***Ableitung*** einer Formel X aus einer Formel Y ist ein Beweis für Y→X.
- Eine ***Ableitung*** einer Formel X aus einer Menge von Formeln M ist ein Beweis des Konditionals, dessen Antezedens die Konjunktion der Elemente von M ist und dessen Konsequens X ist.
- Eine Formel X ***folgt*** genau dann ***aus*** einer Formel Y, wenn X aus Y abgeleitet werden kann.
- Eine Formel X ***folgt*** genau dann ***aus*** einer Menge von Formeln M, wenn X aus M abgeleitet werden kann.

Beweis für *modus ponendo tollens*

Beispiel: Karl fährt nicht nach Rom und nach Mailand. Karl fährt nach Rom. Also fährt Karl nicht nach Mailand.

p: Karl fährt nach Rom.

q: Karl fährt nach Mailand.

$$\neg(p \wedge q)$$
$$p$$
$$\therefore \neg q$$

$$\vdash \neg(p \wedge q) \wedge p \rightarrow \neg q$$
$$\neg(p \wedge q) \wedge p \Rightarrow \neg q$$
$$\{\neg(p \wedge q), p\} \Rightarrow \neg q$$

Beweis im Baumkalkül:

1. $\neg(\neg(p \wedge q) \wedge p \rightarrow \neg q)$ ✓
2. $\neg(p \wedge q) \wedge p$ ✓
3. $\neg\neg q$
4. $\neg(p \wedge q)$ ✓
5. p
6. $\neg p$ ✘ | $\neg q$ ✘

Konstruktionshinweise

- Versuchen Sie, zunächst α-Formeln zu entwickeln, weil sich der Baum dabei nicht verzweigt. So sparen Sie Platz und Zeit.
- Versuchen Sie, zunächst diejenigen β-Formeln zu entwickeln, bei denen sich einer der beiden Äste gleich schliessen lässt. So sparen Sie Platz und Zeit.
- Um Platz zu sparen, können Sie senkrechte Striche im Baum weglassen.
- Wenn Sie eine Formel entwickeln, die sich oberhalb einer Verzweigung im Baum befindet, dann ***müssen*** Sie alle noch offenen Zweige unterhalb dieser Verzweigung um α_1 und α_2 bzw. β_1 und β_2 erweitern.

Beweis für *modus tollendo ponens*

Beispiel: Karl fährt nach Rom oder nach Mailand. Karl fährt nicht nach Rom. Also fährt Karl nach Mailand.

p: Karl fährt nach Rom.

q: Karl fährt nach Mailand.

$$\begin{array}{c} p \lor q \\ \neg p \\ \therefore q \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \vdash (p \lor q) \land \neg p \rightarrow q \\ (p \lor q) \land \neg p \Rightarrow q \\ \{(p \lor q), \neg p\} \Rightarrow q \end{array}$$

$\neg ((p \lor q) \land \neg p \rightarrow q)$ ✓

$(p \lor q) \land \neg p$ ✓

$\neg q$

$(p \lor q)$ ✓

$\neg p$

p ✘ | q ✘

Eigenschaften logischer Kalküle

- Ein Kalkül ist genau dann ***korrekt***, wenn in ihm nur logisch wahre Sätze bewiesen werden können (ableitbar sind).
- Ein Kalkül ist genau dann ***vollständig***, wenn in ihm alle logisch wahren Sätze bewiesen (abgeleitet) werden können.
- Ein Kalkül ist ***adäquat***, wenn er sowohl korrekt als auch vollständig ist, d.h. wenn sich nur und alle logisch wahren Sätze in ihm beweisen (ableiten) lassen.
- Ein Kalkül ist ***widerspruchsfrei***, wenn sich in ihm keine Formel und ihre Negation beweisen (ableiten) lassen.
- Der Baumkalkül ist genau dann korrekt, wenn der Ursprung jedes geschlossenen Baumes unerfüllbar ist.
- Der Baumkalkül ist genau dann vollständig, wenn es in ihm für jeden logisch wahren Satz einen geschlossenen Baum für seine Negation gibt.

  (Man beweist die Vollständigkeit des Baumkalküls, indem man zeigt, dass eine stärkere Behauptung gilt: Jeder vollständige Baum für die Negation eines logisch wahren Satzes ist ein geschlossener Baum. Bitte beachten Sie die Beweise auf den Begleitblättern im Anhand zu dieser Vorlesung.)

Beweise für *modus ponens* und *modus tollens*

$(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$

$\vdash (p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$

1.	$\neg((p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q)$	*NdF **
2.	$(p \rightarrow q) \wedge p$	*aus 1*
3.	$\neg q$	
4.	$(p \rightarrow q)$	*aus 2*
5.	p	
6.	$\neg p$ ✗ / q ✗	*aus 4*

$(p \rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$

$\vdash (p \rightarrow q) \wedge \neg q \rightarrow \neg p$

1.	$\neg((p \rightarrow q) \wedge \neg q \rightarrow \neg p)$	*NdF **
2.	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q$	*aus 1*
3.	$\neg\neg p$	
4.	$(p \rightarrow q)$	*aus 2*
5.	$\neg q$	
6.	$\neg p$ ✗ / q ✗	*aus 4*

** Negation der Formel*

Beweise für das Gesetz der Kontraposition und den Umkehrschluss

$p \rightarrow q \Rightarrow \neg q \rightarrow \neg p$

$\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

1.	$\neg((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p))$	*NdF*
2.	$(p \rightarrow q)$	*aus 1*
3.	$\neg(\neg q \rightarrow \neg p)$	
4.	$\neg q$	*aus 3*
5.	$\neg\neg p$	
6.	$\neg p$ ✗ | q ✗	*aus 2*

$p \leftrightarrow q \Rightarrow q \leftrightarrow p$

$\vdash (p \leftrightarrow q) \rightarrow (q \leftrightarrow p)$

1.	$\neg((p \leftrightarrow q) \rightarrow (q \leftrightarrow p))$	*NdF*
2.	$(p \leftrightarrow q)$	*aus 1*
3.	$\neg(q \leftrightarrow p)$	
4.	p | $\neg q$	*aus 2*
5.	q | $\neg p$	
6.	q | $\neg q$ | q | $\neg q$	*aus 3*
7.	$\neg p$ ✗ | p ✗ | $\neg p$ ✗ | p ✗	

Überprüfung eines Schlusses mit Hilfe des Baumkalküls und mit Hilfe einer Wahrheitswerttabelle

Die XY-Partei wird die Wahl gewinnen, es sei denn, ihrem Vorsitzenden kann die Unterschlagung doch noch nachgewiesen werden. Der Vorsitzende wird die Nerven verlieren und zugeben, seine Doktorarbeit gefälscht zu haben, oder man wird ihm die Unterschlagung doch noch nachweisen können. Wenn der Vorsitzende die Nerven verliert und zugibt, seine Doktorarbeit gefälscht zu haben, wird die XY-Partei die Wahl nicht gewinnen. Also wird die XY-Partei die Wahl nicht gewinnen.

p: Die XY-Partei wird die Wahl gewinnen.

q: Dem Vorsitzenden der XY-Partei wird die Unterschlagung doch noch nachgewiesen werden können.

r: Der Vorsitzende der XY-Partei wird die Nerven verlieren und zugeben, seine Doktorarbeit gefälscht zu haben.

$(p \leftrightarrow \neg q)$
$(r \vee q)$
$(r \rightarrow \neg p)$
$\therefore \neg p$

$$((p \leftrightarrow \neg q) \wedge (r \vee q)) \wedge (r \rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg p$$

$$\vdash ((p \leftrightarrow \neg q) \wedge (r \vee q)) \wedge (r \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p$$

Die XY-Partei wird die Wahl gewinnen, es sei denn, ihrem Vorsitzenden kann die Unterschlagung doch noch nachgewiesen werden. Der Vorsitzende wird die Nerven verlieren und zugeben, seine Doktorarbeit gefälscht zu haben, oder man wird ihm die Unterschlagung doch noch nachweisen können. Wenn der Vorsitzende die Nerven verliert und zugibt, seine Doktorarbeit gefälscht zu haben, wird die XY-Partei die Wahl nicht gewinnen. Also wird die XY-Partei die Wahl nicht gewinnen.

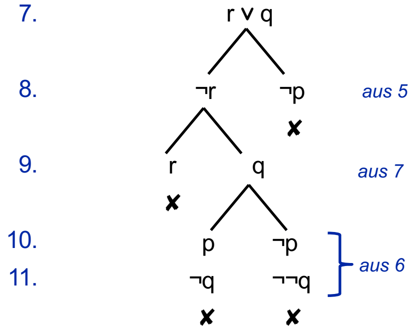
$(p \leftrightarrow \neg q)$
$(r \vee q)$
$(r \rightarrow \neg p)$
$\therefore \neg p$

$((p \leftrightarrow \neg q) \wedge (r \vee q)) \wedge (r \rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg p$

$\{(p \leftrightarrow \neg q), (r \vee q), (r \rightarrow \neg p)\} \Rightarrow \neg p$

$\vdash ((p \leftrightarrow \neg q) \wedge (r \vee q)) \wedge (r \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p$

1. $\neg(((p \leftrightarrow \neg q) \wedge (r \vee q)) \wedge (r \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p)$ ✓ *NdF*
2. $((p \leftrightarrow \neg q) \wedge (r \vee q)) \wedge (r \rightarrow \neg p)$ ✓ *aus 1*
3. $\neg\neg p$
4. $(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (r \vee q)$ ✓ *aus 2*
5. $r \rightarrow \neg p$ ✓
6. $p \leftrightarrow \neg q$ ✓ *aus 4*
7. $r \vee q$ ✓



$((p \leftrightarrow \neg q) \wedge (r \vee q)) \wedge \ (r \rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg p$

$\vdash ((p \leftrightarrow \neg q) \wedge (r \vee q)) \wedge \ (r \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p$

Konditional

Hauptzeichen

Konjunktion

Konjunktion

p	q	r	((p ↔	¬q)	∧	(r ∨ q))	∧	(r →	¬p)	→	¬p
w	w	w	f	f	f	w	f	f	f	**w**	f
w	w	f	f	f	f	w	f	w	f	**w**	f
w	f	w	w	w	w	w	f	f	f	**w**	f
w	f	f	w	w	f	f	f	w	f	**w**	f
f	w	w	w	f	w	w	w	w	w	**w**	w
f	w	f	w	f	w	w	w	w	w	**w**	w
f	f	w	f	w	f	w	f	w	w	**w**	w
f	f	f	f	w	f	f	f	w	w	**w**	w

BEWEIS DES ZUSAMMENHANGS ZWISCHEN ATOMAREN UND BOOLESCHEN BEWERTUNGEN DURCH INDUKTION ÜBER DEN GRAD DER FORMELN IN AL

Jede atomare Bewertung lässt sich zu genau einer booleschen Bewertung erweitern; und umgekehrt enthält jede boolesche Bewertung genau eine atomare Bewertung.

BEWEIS

Teil I: Beweis des zweiten Teils der Behauptung:

Angenommen *b* sei eine boolesche Bewertung für die Menge *A* aller aussagenlogischen Formeln. Dann ordnet *b* jedem Element von *A* genau einen der beiden Wahrheitswerte "w" oder "f" zu, also auch den in *A* enthaltenen Satzkonstanten. Durch Einschränkung auf die Satzkonstanten (und die ihnen durch *b* zugeordneten Wahrheitswerte) ergibt sich deshalb eindeutig eine atomare Bewertung *a* für *A*. Damit ist der zweite Teil der oberen Behauptung bewiesen.

Teil II: Beweis des ersten Teils der Behauptung:

Angenommen *a* sei eine atomare Bewertung für *A*. Dann ordnet *a* allen in *A* enthaltenen Satzkonstanten einen der beiden Wahrheitswerte zu. *a* lässt sich zu genau einer booleschen Bewertung *b* (für *A*) erweitern, - einer Bewertung, die allen in *A* enthaltenen Formeln F einen Wahrheitswert zuordnet, wie man durch Induktion nach dem Grad n der Formeln erkennt.

Der *Grad einer Formel* von AL ist durch die Anzahl der in ihr vorkommenden Junktorensymbole bestimmt. Satzkonstanten haben den Grad 0 und werden auch *atomare Formeln* genannt.

G_0: Satzkonstanten haben den Grad 0.
G_1: Wenn X den Grad n hat, dann hat ¬X den Grad n+1.
G_2: Wenn X, Y die Grade n_1 und n_2 haben, dann haben $(X\wedge Y)$, $(X\wedge Y)$, $(X\rightarrow Y)$ und $(X\leftrightarrow Y)$ jeweils den Grad n_1+n_2+1.

1. INDUKTIONSBASIS
   Für n = 0 gilt: F ist eine Satzkonstante und *a*(F) = *b*(F).
   (Für alle Formeln vom Grad 0 gilt also: Ihr Wahrheitswert unter *b* ist eindeutig bestimmt.)

2. INDUKTIONSSCHRITT
   Wenn für eine Formel vom Grad n *b*(F) eindeutig ist (Induktionsvoraussetzung), dann auch für eine Formel mit dem Grad n+1.
   Denn für n > 0 liegt einer der beiden Fälle vor:

   2.1 F hat die Gestalt ¬X; *b*(X) ist eindeutig nach IV, dann nach b_1 auch *b*(¬X).*

   2.2 F hat die Gestalt XjY (j = $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$); *b*(X) und *b*(Y) sind eindeutig (IV), dann nach b_2 bis b_5 auch *b*(XjY).*

3. Also ist *b*(F) für alle Formeln F $\in$ *A* eindeutig.

* *„b_1“ – „b_5“ beziehen sich auf die Bedingungen, denen boolesche Bewertungen genügen.*

DER BAUM-KALKÜL

1. Zu einem *geordneten Baum* B gehören:

(1) Eine Menge P von Elementen, die "Punkte" genannt werden.
(2) Eine Funktion f, die jedem Punkt x $\in P$ eine natürliche Zahl zuordnet; f(x) wird die "Stufe von x" genannt.
(3) Eine Relation Nxy in P ("x ist der Vorgänger von y" bzw. "y ist der Nachfolger von x"), die folgenden Bedingungen genügt:
b_1: Es gibt genau einen Punkt a_1 erster Stufe. Dieser Punkt ist der *Ursprung* von B.
b_2: Jeder andere Punkt hat genau einen Vorgänger.
b_3: Für alle Punkte x,y gilt: Wenn y ein Nachfolger von x ist, dann ist f(y) = f(x)+1.
(4) Eine Funktion θ, die jedem *Verzweigungspunkt* (das ist ein Punkt mit mehr als einem Nachfolger) z eine Folge θ(z) zuordnet, die alle Nachfolger von z enthält (und keine Wiederholungen).

Ein *Ast* A eines Baumes B ist eine abzählbare Folge von Punkten, die mit dem Ursprung von B beginnt, so dass jedes Element aus A der Vorgänger des folgenden Elements ist (mit Ausnahme des letzten, falls es solch einen Punkt gibt) und deren letztes Element ein *Endpunkt* ist (d.i. ein Punkt, der keine Nachfolger hat) oder die unendlich ist.

2. Ein *systematischer Baum* für eine Formel X ist ein geordneter dyadischer Baum, dessen Punkte Formeln sind und der wie folgt konstruiert wird:

(1) X wird als Ursprung des Baumes gesetzt (= 1.Schritt)
(2) Angenommen, Schritt n ist vollzogen und Y ein Endpunkt, dann kann B auf folgende zwei Arten erweitert werden:
 (a) Wenn irgendeine α-Formel auf dem Ast A_Y vorkommt, dann werden nacheinander α_1 und α_2 jeweils als alleinige Nachfolger von Y angehängt.*
 (b) Wenn eine β-Formel auf A_Y vorkommt, dann werden gleichzeitig β_1 als linker Nachfolger und β_2 als rechter Nachfolger von Y angehängt.*

Seien B_1 und B_2 zwei geordnete dyadische Bäume, deren Punkte Vorkommnisse von Formeln sind, dann soll B_2 eine *unmittelbare Erweiterung* von B_1 heißen, wenn B_2 durch Anwendung einer der beiden Regeln (a) oder (b) aus B_1 gewonnen werden kann.

B ist genau dann ein *systematischer Baum für* X, wenn es eine endliche Folge (B_1, B_2, ..., B_n = B) von Bäumen gibt, so dass B_1 ein 1-Punkte-Baum ist, dessen Ursprung X ist, und für jedes i<n gilt: B_{i+1} ist eine unmittelbare Erweiterung von B_i.

Ein Ast ist genau dann *geschlossen*, wenn auf ihm eine Formel und ihre Negation vorkommen. Ein Baum B ist genau dann geschlossen, wenn jeder Ast von B geschlossen ist. Ein *Beweis* für eine Formel X ist ein geschlossener Baum für die Negation von X.

Ein Ast A eines Baumes B soll dann *fertig* oder *vollständig* heißen, wenn zu jedem α, das auf A vorkommt, auch α_1 und α_2 auf A vorkommen und zu jedem β, das auf A vorkommt, wenigstens eins von beiden - β_1 oder β_2 - auf A vorkommt. Ein Baum soll dann *vollständig* oder *fertig* sein, wenn jeder seiner Äste entweder fertig oder geschlossen ist.

* Für die Einteilung der AL-Formeln in α- und β-Formeln vgl. Folien zur Vorlesung.

DIE VOLLSTÄNDIGKEIT DES AUSSAGENLOGISCHEN BAUMKALKÜLS

Beweisziel:

Jede Tautologie (logische Wahrheit) ist beweisbar.

Nach der Definition eines Beweises im Baumkalkül ist das Beweisziel mit folgender Behauptung äquivalent:

Für jede Tautologie gibt es einen geschlossenen Baum für ihre Negation.

Bewiesen wird die stärkere Behauptung:

Jeder vollständige Baum für die Negation einer Tautologie ist ein geschlossener Baum.

INDIREKTER BEWEIS: Die gegenteilige Annahme führt zu einem Widerspruch.

1) Annahme: Es gibt einen offenen vollständigen Baum B_a für die Negation einer Tautologie.

2) Jeder vollständige offene Ast eines Baumes ist erfüllbar. Denn die Menge *M* der auf einem vollständigen offenen Ast vorkommenden Formeln ist eine sogenannte *Hintikka-Menge*, die folgende Bedingungen erfüllt:

   H_0: Keine Satzkonstante und ihre Negation kommen in *M* vor.
   H_1: Wenn $\alpha \in M$, dann sind auch α_1 und $\alpha_2 \in M$.
   H_2: Wenn $\beta \in M$, dann ist auch β_1 oder $\beta_2 \in M$.

3) Jede Hintikka-Menge ist erfüllbar. Beweis: Sei *M* eine Hintikka-Menge, dann erhält man eine Bewertung *b* (über der Menge *M'* aller Teilformeln der in *M* enthaltenen Formeln), die *M* erfüllt, indem man mit der Bewertung der in *M* enthaltenen Satzkonstanten beginnt, dabei wie folgt verfährt, und im Anschluss an Schritt 3. zu einer booleschen Bewertung erweitert.

   1. Wenn $p \in M$, dann $b(p) = w$
   2. Wenn $\neg p \in M$, dann $b(p) = f$
   3. Wenn weder $p \in M$, noch $\neg p \in M$, dann $b(p) = w$ (oder $b(p) = f$)

   Durch Induktion über den Grad n der in *M* enthaltenen Formeln lässt sich zeigen, dass alle in *M* enthaltenen Formeln unter *b* wahr sind.

   Für alle $F \in M$ mit $n = 0$ gilt: $b(F) = w$ (wegen Schritt 1), d. h. alle in *M* enthaltenen Satzkonstanten sind wahr unter *b* (Induktionsbasis).

   Für alle $F \in M$ mit $n > 0$ ist, gilt: F ist entweder ein α oder ein β.

   Angenommen alle Elemente von *M*, deren Grad kleiner ist als der von *F*, sind wahr unter *b* (Induktionsvoraussetzung), dann gilt:

   Wenn $F = \alpha$, dann (wegen H_1) $\alpha_1 \in M$ und $\alpha_2 \in M$. α_1 und α_2 sind von geringerem Grad als α und damit nach IV wahr unter *b*. Damit ist auch α wahr unter *b*.

   Wenn $F = \beta$, dann (wegen H_2) $\beta_1 \in M$ oder $\beta_2 \in M$, beide sind von geringerem Grad als β und damit nach IV wahr unter *b*. Damit ist auch $b(\beta) = w$.

   Also ist für alle $F \in M : b(F) = w$. *M* ist erfüllbar. Damit sind 3) und auch 2) bewiesen.

4) Der Ursprung von B_a ist erfüllbar, denn er liegt auf jedem der Äste von B_a und damit auch auf einem offenen vollständigen Ast *A*, der nach 2) erfüllbar sein muss.

5) Der Ursprung von B_a kann aber nicht erfüllbar sein, weil er die Negation einer Tautologie (also eine Kontradiktion) ist. Also führt die Annahme 1) zu einem Widerspruch und ist unhaltbar. Ihre Negation hingegen (das Beweisziel) ist wahr.

DIE KORREKTHEIT DES AUSSAGENLOGISCHEN BAUMKALKÜLS

BEWEISZIEL:

Jede Formel, für die es einen Beweis im Baumkalkül gibt, ist ein Tautologie.

Aufgrund der Definition eines Beweises für eine Formel im Baumkalkül (geschlossener Baum für ihre Negation) ist folgende Behauptung mit dem Beweisziel äquivalent:

Der Ursprung jedes geschlossenen Baumes ist unerfüllbar.

BEWEIS:
Sei *B* ein Baum und *b* eine boolesche Bewertung, deren Definitionsbereich wenigstens alle Teilformeln der auf *B* vorkommenden Formeln enthält. Dann sei ein Ast *A* genau dann *wahr unter b*, wenn jede auf *A* vorkommende Formel wahr unter *b* ist. Der Baum *B* als ganzer soll genau dann *wahr unter b* sein, wenn wenigstens einer der Äste von *B* wahr unter *b* ist.

LEMMA (Hilfssatz): Wenn ein Baum B_2 eine unmittelbare Erweiterung eines Baumes B_1 ist, dann muss B_2 unter jeder Bewertung, unter der B_1 wahr ist, ebenfalls wahr sein.

BEWEIS: Wenn B_1 wahr ist, enthält B_1 mindestens einen wahren Ast *A*. B_2 ist aus B_1 dadurch entstanden, dass ein oder zwei Nachfolger an einen Ast A_1 von B_1 angehängt wurden. Wenn A_1 verschieden ist von *A*, dann enthält B_2 immer noch den wahren Ast *A* und ist somit wahr. Wenn A_1 mit *A* identisch ist, d.h. wenn es gerade der wahre Ast *A* von B_1 war, der verlängert wurde, so dass B_2 entstand, dann liegt einer von folgenden zwei Fällen vor:

> Entweder wurde *A* durch eine Anwendung der Regel (a) erweitert, dann kommt auf *A* irgendein α vor und *A* wurde zu (A_1, α_1, α_2) erweitert. Aber α_1 und α_2 sind beide wahr, weil α wahr ist, deshalb ist (A_1, α_1, α_2) wahr, also enthält auch B_2 einen wahren Ast und ist somit selbst wahr.
>
> Oder aber *A* wurde durch die Anwendung der Regel (b) verlängert, dann kommt auf *A* irgend ein β vor und die beiden Äste (A_1, β_1) und (A_1, β_2) sind Äste von B_2. Aber weil β wahr ist, muss wenigstens eins von beiden, β_1 oder β_2 ebenfalls wahr sein. Also ist wenigstens einer der beiden Äste (A_1, β_1) oder (A_1, β_2) von B_2 wahr, also ist auch in diesem Fall B_2 wahr.

Jede unmittelbare Erweiterung eines (unter einer bestimmten Bewertung) wahren Baumes ist also ebenfalls wahr (unter dieser Bewertung). Daraus folgt durch Induktion, dass für alle Bäume *B* gilt: Wenn der Ursprung von *B* unter irgendeiner booleschen Bewertung *b* wahr ist, dann ist auch *B* unter *b* wahr. Ein geschlossener Baum ist unter keiner Bewertung wahr. Also kann auch sein Ursprung unter keiner Bewertung wahr sein. (Denn wenn er es wäre, wäre auch der Baum wahr). Also ist der Ursprung jedes geschlossenen Baumes unerfüllbar.

Also ist jede Formel, für die es einen Beweis im Baumkalkül gibt, tatsächlich eine Tautologie. Es folgt außerdem, dass das Baumkalkül in folgendem Sinne konsistent ist: Keine Formel und ihre Negation können im Baumkalkül bewiesen werden (denn es können nicht beides Tautologien sein.)